第１問［１］

実数 x, y は

$$3^{1+\log_{10} x} - 5^y = 1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を満たしている。このとき

$$K = \frac{5^y}{3} + 3^{-\log_{10} x}$$

の最小値を求めよう。真数の条件により $x > \boxed{\text{ア}}$ である。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、a を底といい、b を真数という。次に $(*)$ より

$$5^y = \boxed{\text{イ}} \cdot 3^{\log_{10} x} - 1$$

である。$z = 3^{\log_{10} x}$ とおくと、$5^y > 0$ であるから、z のとり得る値の範囲は

$$z > \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる。さらに、

$$K = z + \frac{\boxed{\text{オ}}}{z} - \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}$$

となるから、K は $z = \boxed{\text{キ}}$ のとき、最小値 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。このとき、

$x = \boxed{\text{コ}}$, $y = \log_{\boxed{\text{サ}}} \boxed{\text{シ}}$ である。

CHECK

真数条件は（真数）> 0

■ア　真数条件より、$x > \mathbf{0}$ である。

CHECK

指数法則 $p^{a+b} = p^a \cdot p^b$

■イ　指数法則 $p^{a+b} = p^a \cdot p^b$ より、

$$3^{1+\log_{10} x} = 3^1 \cdot 3^{\log_{10} x}$$

だから、$(*)$ 式より、

$$5^y = \mathbf{3} \cdot 3^{\log_{10} x} - 1 \qquad \text{(a)}$$

となる。

■ウエ　$z = 3^{\log_{10} x}$ とおきかえると、(a) 式より

$$5^y = 3z - 1 \qquad \text{(b)}$$

となるが、$5^y > 0$ であるから $3z - 1 > 0$、すなわち、

$$z > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \qquad \text{(c)}$$

である。

■オカ　これも計算問題。

$$3^{-\log_{10} x} = (3^{\log_{10} x})^{-1} = z^{-1}$$

だから、(b) より、

$$K = \frac{3z-1}{3} + z^{-1} = z + \frac{\mathbf{1}}{z} - \frac{1}{\mathbf{3}}$$

$\boxed{\text{CHECK}}$

$x+\dfrac{1}{x}$ **のような関係をみたら相加相乗**

■キクケ　ここが難しい。いま、$z>0$ であるから、相加相乗の関係より、

$$z+\frac{1}{z} \geqq 2\sqrt{z\cdot\frac{1}{2}}=2$$

である。等号成立は $z=\dfrac{1}{z}$ すなわち $z=1$ のときであり、これは条件 (c) を満たしている。よって K は $z=\mathbf{1}$ のとき、最小値

$$K=2-\frac{1}{3}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$$

をとる。

■コサシ　最後も計算だけ。$z=1$ のとき、

$$3^{\log_{10} x}=1$$

すなわち、$\log_{10} x=0$ より $x=\mathbf{1}$ であり、(b) 式より、

$$5^y=3z-1=2$$

だから、両辺に底を 5 とする対数を取って、

$$\log_5 5^y=\log_5 2$$

であり、左辺は $y\log_5 5=y$ であるから、

$$y=\log_{\mathbf{5}} \mathbf{2}$$

となる。

第１問［２］

a を正の定数とする。点 O を原点とする座標平面において、中心が O で、半径が 1 の円と半径が 2 の円をそれぞれ C_1, C_2 とする。$\theta \geqq 0$ を満たす実数 θ に対して、角 $a\theta$ の動径と C_1 との交点を P とし、角 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}$ の動径と C_2 との交点を Q とする。ここで動径は O を中心とし、その始線は x 軸の正の部分とする。

(1)　$\theta = \pi$ のとき、Q の座標は $\left(\sqrt{\boxed{\text{ス}}}, \boxed{\text{セ}}\right)$ である。

(2)　3 点 O,P,Q がこの順に一直線上にあるような最小の θ の値は、

$$\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}}\pi$$

である。θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}}\pi$ の範囲を動くとき、円 C_2 において点 Q の軌跡を弧とする扇形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}\,a + \boxed{\text{ト}}}\pi$$

である。

(3)　線分 PQ の長さの 2 乗 PQ^2 は

$$\boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sin\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}\,a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\theta\right)$$

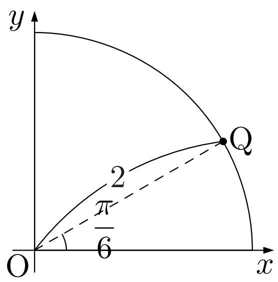
である。

(4)　x の関数 $f(x)$ を

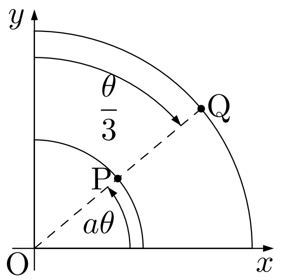
$$f(x) = \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sin\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}\,a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}x\right)$$

とおき、$f(x)$ の正の周期のうち最小のものが 4π であるとすると、$a = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

■スセ　$\theta = \pi$ のとき、点 Q の始線からの正の角度は $\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$ だから、点 Q の座標は $\left(2\cos\dfrac{\pi}{6}, 2\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \left(\boldsymbol{\sqrt{3}, 1}\right)$ である。図は次の通り。



■ソタチ　次の図のように、θ が大きくなると P は x 軸から第 1 象限に向かって、Q は y 軸から第 1 象限に向かって移動するので、第一象限に O,P,Q が一直線上になる最小の θ が存在すると考えられる。



条件は、$a\theta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}$ より、

$$a\theta + \frac{\theta}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(a + \frac{1}{3}\right)\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{1}{\left(a + \frac{1}{3}\right)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{3a+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}a + \mathbf{2}}\pi$$

♠ 厳密には、n を整数として $a\theta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3} + 2n\pi$ すなわち、

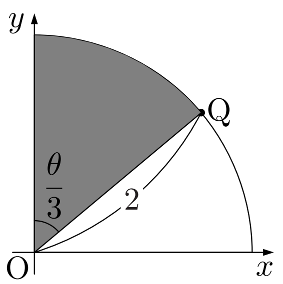
$$\theta = \frac{3}{3a+1}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

であり、最小の θ は $n = 0$ のときであるから $n = 0$ を代入して解答を得る。

$\boxed{\text{CHECK}}$

半径 r、中心角 θ（弧度法）の扇形の面積は $\dfrac{1}{2}r^2\theta$ である。

■ツテト　求める扇形は、A$(0, 2)$ とおくとき、扇形 AOQ となる。



$\theta = \dfrac{3}{6a+2}\pi$ のとき、扇形 AOQ の中心角は $\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{1}{6a+2}\pi$ である。扇形の面積は、

$$\frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6a+2}\pi \times 2^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}a + \mathbf{1}}\pi$$

である。

■ナニヌネノ　点 P の座標は $(\cos a\theta, \sin a\theta)$ である。点 Q の座標は、

$$\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3}\right), 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3}\right)\right)$$

$$= \left(2\sin\frac{\theta}{3}, 2\cos\frac{\theta}{3}\right)$$

だから、

$$\mathrm{PQ}^2 = \left(\cos a\theta - 2\sin\frac{\theta}{3}\right)^2 + \left(\sin a\theta - 2\cos\frac{\theta}{3}\right)^2$$

$$= 5 - 4\left(\cos a\theta \sin\frac{\theta}{3} + \sin a\theta \cos\frac{\theta}{3}\right)$$

ここで加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

を逆に使って、

$$= 5 - 4\sin\left(\frac{\theta}{3} + a\theta\right)$$

$$= \mathbf{5} - \mathbf{4}\sin\left(\frac{\mathbf{3}a + \mathbf{1}}{\mathbf{3}}\theta\right)$$

$\boxed{\text{CHECK}}$

$\sin ax$ の基本周期は $\dfrac{2\pi}{a}$ である

■ハヒ　関数 $f(x) = 2 - 4\sin\left(\dfrac{3a+1}{3}\theta\right)$ の振動する部分は、$\sin\left(\dfrac{3a+1}{3}\theta\right)$ であるから、その基本周期は、$\dfrac{2\pi}{\frac{3a+1}{3}} = \dfrac{6\pi}{3a+1}$ であるから、

$$\frac{6\pi}{3a+1} = 4\pi$$

を a について解いて、$a = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ である。

第2問

a を正の定数とし、x の2次関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2$$
$$g(x) = -x^2 + 3ax - 2a^2$$

とする。また、放物線 $y = f(x)$ および $y = g(x)$ をそれぞれ C_1, C_2 とする。

(1)　C_1 と C_2 の共有点を P とすると、点 P の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a, \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}a^2\right)$

である。また点 P における C_1 の接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}ax - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}a^2$$

である。

(2)　C_1 と x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。また、C_2 と x 軸の交点の x 座標は $\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シス}}$ であり、C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3$ である。

(3)　$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で、二つの放物線 C_1, C_2 と2直線 $x = 0, x = 2$ で囲まれた図形を R とする。R の中で、$y \geqq 0$ を満たすすべての部分の面積 $S(a)$ は

$0 < a \leqq \boxed{\text{タ}}$ のとき $S(a) = -\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^2 + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

$\boxed{\text{タ}} < a \leqq \boxed{\text{チ}}$ のとき

$$S(a) = -\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a^3 + \boxed{\text{ト}}a^2 - \boxed{\text{ナ}}a + \boxed{\text{ニ}}$$

$\boxed{\text{チ}} < a$ のとき $S(a) = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

である。したがって、a が $a > 0$ の範囲を動くとき、$S(a)$ は $a = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ で最小値 $a = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとる。

■アイウエ　問題で与えられた $f(x), g(x)$ の式をそれぞれ (a)、(b) とする。共有点は $f(x)=g(x)$ を満たす点であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}x^2 &= -x^2+3ax-2a^2 \\ x^2 &= -8x^2+24ax-16a^2 \\ 9x^2-24ax+16a^2 &= 0 \\ (3x-4a)^2 &= 0 \end{aligned}$$

より、$x=\boldsymbol{\frac{4}{3}}a$ であり、このときの y 座標は (a) に代入して

$$y=\frac{1}{8}\times\left(\frac{4}{3}a\right)^2=\boldsymbol{\frac{2}{9}}a^2$$

である。

CHECK

$y=f(x)$ の点 $x=a$ における接線は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

である。

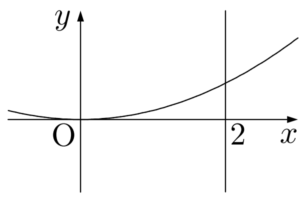
■オカキク　$f'(x)=\dfrac{1}{4}x$ であるから、$f'\left(\dfrac{4}{3}a\right)=\dfrac{1}{3}a$ である。よって、点 P における C_1 の接線は、

$$\begin{aligned} y &= f'\left(\frac{4}{3}a\right)\left(x-\frac{4}{3}a\right)+\frac{2}{9}a^2 \\ &= \frac{1}{3}a\left(x-\frac{4}{3}a\right)+\frac{2}{9}a^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}}ax-\boldsymbol{\frac{2}{9}}a^2 \end{aligned}$$

である。

■ケコ　求める面積は、

$$\int_0^2 \frac{1}{8}x^2dx=\left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$



■サシス　C_2 と x 軸の交点の x 座標は $g(x)=0$ の解。

$$\begin{aligned} -x^2+3ax-2a^2 &= 0 \\ x^2-3ax+2a^2 &= 0 \\ (x-a)(x-2a) &= 0 \end{aligned}$$

より、$x=\boldsymbol{a}, \boldsymbol{2a}$ である。

CHECK

2 次関数と直線に囲まれる面積は 1/6 公式を使う

■セソ　C_2 は上に凸であることと、いま求めた x 軸との交点から、求める面積は、

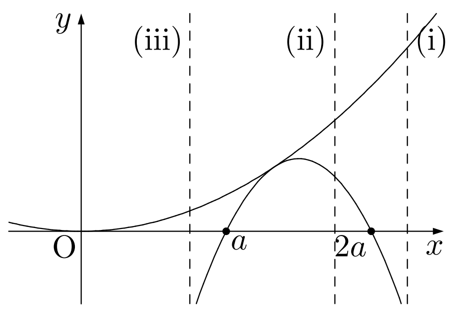
$$\int_a^{2a}(-x^2+3ax-2a^2)dx$$

である。ここで、2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ と $y=px+q$ に囲まれる面積は、その交点の x 座標を α, β（$\alpha<\beta$）とするとき、$\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ であり、いまこれを利用することができ、$\alpha=a, \beta=2a$ なので、

$$\frac{|-1|}{6}(2a-a)^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}}a^3$$

である。

■タチツテトナニ　まずは C_1, C_2 のグラフを描くと、次のようになる。



$x=2$ の直線がどこにあるかで場合分けすればよい。

(i)　$2a \leqq 2$ すなわち $(0<)a \leqq \boldsymbol{1}$ のとき

求める面積は、

$S(a)=$（$y=f(x)$ と x 軸と

$x=2$ で囲まれる面積）

$-$（$y=g(x)$ と x 軸で囲まれる面積）

である。これらは両方すでに求めているのでそれを使って、

$$S(a) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}a^3$$

である。

(ii)　$a \leqq 2 < 2a$ すなわち $1 < a \leqq \mathbf{2}$ のとき

求める面積は、

$$\begin{aligned} S(a) = &(y = f(x) \text{ と } x \text{ 軸と } x = 2 \text{ で囲まれる面積}) \\ &-(y = g(x) \text{ と } x \text{ 軸と } x = 2 \text{ で囲まれる面積}) \end{aligned}$$

である。第 2 項はまだ求めていないのでこれを求めると、

$$\begin{aligned} &\int_a^2 (-x^2 + 3ax - 2a^2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - 2a^2x\right]_a^2 \\ &= -\frac{1}{3}(8 - a^3) + \frac{3}{2}a(4 - a^2) - 2a^2(2 - a) \\ &= \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3}\right) \\ &= -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}a^3 + \mathbf{4}a^2 - \mathbf{6}a + \mathbf{3} \end{aligned}$$

となる。

(iii)　$1 < a$ のとき

求める面積は、

$$\begin{aligned} S(a) &= (y = f(x) \text{ と } x \text{ 軸と } x = 2 \text{ で囲まれる面積}) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

♠ この場合分けの不等号の等号部分は、はじめは無視して考え、解答欄にあわせてあとで付けている。

■ヌネノハヒ　ここでは、今の場合分けの範囲ごとの最小値を比較して、もっとも小さい値になる点を $S(a)$ の最小値とすればよい。

(i) の範囲の最小値は $\frac{1}{3}$、(iii) の範囲の最小値は $a = 1$ のとき

$$S(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

である。

次に (ii) の範囲の最小値を求める。極値は、

$$S'(a) = -\frac{5}{2}a^2 + 8a - 6 = 0$$

より、

$$\begin{aligned} 5a^2 - 16a + 12 &= 0 \\ (5a - 6)(a - 2) &= 0 \\ a &= \frac{6}{5}, 2 \end{aligned}$$

となるので、増減表は

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$	$S\left(\frac{6}{5}\right)$	$\nearrow$	

より、極小値は $a = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$ のときで、

$$\begin{aligned} S\left(\frac{6}{5}\right) &= -\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \frac{6^2}{5} + 3 \\ &= -\frac{6^2}{5^2} + 4\cdot\frac{6^2}{5^2} - 5\cdot\frac{6^2}{5^2} + 3 \\ &= -\frac{2\cdot 6^2}{5^2} + 3 \\ &= -\frac{72}{25} + 3 = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{25}} \end{aligned}$$

となる。（これは実際 (i) の最小値 $\frac{1}{3}$ より小さい。）

第3問

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項が 7、公差が -4 の等差数列とする。数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{アイ}}\,n + \boxed{\text{ウエ}}$$

であり、初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{オカ}}\,n^2 + \boxed{\text{キ}}\,n$$

である。

(2)　数列 $\{b_n\}$ は、第 n 項が

$$b_n = pn^2 - qn - r$$

という n の 2 次式で表され

$$b_{n+1} - 2b_n = \boxed{\text{オカ}}\,n^2 + \boxed{\text{キ}}\,n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots①$$

を満たすとする。このとき

$$p = \boxed{\text{ク}}, \quad q = \boxed{\text{ケ}}, \quad r = \boxed{\text{コ}}$$

であり、$b_1 = \boxed{\text{サシ}}$ である。

さらに、次の条件によって定まる数列 $\{c_n\}$ を考えよう。

$$c_1 = 1$$

$$c_{n+1} - 2c_n = \boxed{\text{オカ}}\,n^2 + \boxed{\text{キ}}\,n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots②$$

①と②より、$d_n = c_n - b_n$ とおくと

$$d_{n+1} - \boxed{\text{ス}}\,d_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つ。これより、数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = \boxed{\text{セ}} \cdot \boxed{\text{ソ}}^{\,n-1} + \boxed{\text{ク}}\,n^2 - \boxed{\text{ケ}}\,n - \boxed{\text{コ}}$$

である。

数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ は

$$\boxed{\text{タ}} \cdot \boxed{\text{チ}}^{\,n} + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\,n^3 - \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\,n^2 - \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\,n - \boxed{\text{ノ}}$$

となる。

CHECK

初項 a_1、公差 d の等差数列の一般項 a_n は、

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

■アイウエオカキ　公式に当てはめて、

$$\begin{aligned} a_n &= 7 + (-4)\cdot(n-1) \\ &= 7 - 4n + 4 \\ &= \mathbf{-4}n + \mathbf{11} \end{aligned}$$

であり、第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(-4k+11) &= -4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 11n \\ &= 2n^2 + 2n - 11n \\ &= \mathbf{-2}n^2 + \mathbf{9}n \end{aligned}$$

である。

■クケコサシ　実際に①を書き下すと、

$$\begin{aligned} &\{p(n+1)^2 - q(n+1) - r\} \\ &\quad - 2(pn^2 - qn - r) \\ &\qquad = -2n^2 + 9n \qquad \text{(a)} \end{aligned}$$

である。(a) 式の両辺において、n^2 の係数は等しいから、

$$p - 2p = -2$$

より $p = \mathbf{2}$ となる。同様に n の係数は等しいから、

$$2p - q + 2q = 9$$

に $p = 2$ を代入して整理すると $q = \mathbf{5}$ となる。さらに定数項も等しいので、

$$p - q - r + 2r = 0$$

に $p = 2, q = 5$ を代入して $r = \mathbf{3}$ を得る。このとき、

$$b_n = 2n^2 - 5n - 3$$

であり、$b_1 = 2 - 5 - 3 = \mathbf{-6}$ となる。

■ス　$\{b_{n+1} - 2b_n\}$ と $\{c_{n+1} - 2c_n\}$ の一般項は等しいので、

$$\begin{aligned} b_{n+1} - 2b_n &= c_{n+1} - 2c_n \\ c_{n+1} - b_{n+1} - 2(c_n - b_n) &= 0 \\ d_{n+1} - \mathbf{2}d_n &= 0 \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

となる。

■セソ　(b) より $d_{n+1} = 2d_n$ であり、$d_1 = c_1 - b_1 = 1 - (-6) = 7$ であることから、$\{d_n\}$ の一般項は、$d_n = 7\cdot 2^{n-1}$ となるので、

$$c_n = d_n + b_n = \mathbf{7}\cdot\mathbf{2}^{n-1} + 2n^2 - 5n - 3$$

である。

■タチツテトナニヌネノ　混合していて分かりにくいが、初めの 1 つの項は等比数列の和の公式、後半 3 項はシグマ公式を適応すればよく、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} c_k &= \frac{7(2^n-1)}{2-1} + 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &\qquad - 5\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 3n \\ &= 7(2^n-1) + \frac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1) \\ &\qquad - 15(n+1) - 18\} \\ &= 7(2^n-1) \\ &\qquad + \frac{1}{6}n(4n^2 + 6n + 2 - 15n - 15 - 18) \\ &= 7(2^n-1) + \frac{1}{6}n(4n^2 - 9n - 31) \\ &= \mathbf{7}\cdot\mathbf{2}^n + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}n^3 - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}n^2 - \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{6}}n - \mathbf{7} \end{aligned}$$

となる。

第４問

四面体 OABC において、$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}, \mathrm{OC}=\mathrm{CA}=\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ である。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\boxed{\text{ア}}$ であり、$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また、$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \vec{c}\cdot\vec{a}=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　直線 AB 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$ であるようにとると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}-\vec{c}$$

となり、点 P は線分 AB を $1:\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に内分する。また、$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ス}}$ であり、$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は三角形 $\boxed{\text{チ}}$ の各辺と垂直であるから、直線 CP は三角形 $\boxed{\text{チ}}$ を含む平面に垂直である。ただし、$\boxed{\text{チ}}$ については、当てはまるものを、次の⓪〜③のうちから一つ選べ。

⓪　ABC　　①　OBC　　②　OAC　　③　OAB

三角形 $\boxed{\text{チ}}$ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であるから、四面体 OABC の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

■アイウ　$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから、

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=\mathbf{3} \qquad \text{(a)}$$

である。一方、(a) の左辺を展開して、

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3$$

であり、$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$ だから、

$$4-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$$

すなわち、$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ である。

■エオカ　同様にして、

$$|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=2$$

$$5-2\vec{b}\cdot\vec{c}=2$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=3$$

$$5-2\vec{c}\cdot\vec{a}=3$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\mathbf{1}$$

となる。

■キクケコ　直線 AB 上の点 P は、その位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ とおくと、

$$\overrightarrow{p} = t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

となるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}\\ &= t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\end{aligned}$$

だから、

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{a} = 0$$
$$\{t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\} \cdot \overrightarrow{a} = 0$$
$$t|\overrightarrow{a}|^2 + (1-t)\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = 0$$

ここで、すでに求めた値を代入して、

$$2t + \frac{1}{2}(1-t) - 1 = 0$$
$$\frac{3}{2}t - \frac{1}{2} = 0$$

より、$t = \frac{1}{3}$ となり、このとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}\overrightarrow{a} + \boldsymbol{\frac{2}{3}}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$$

である。

■サシ　いま、

$$\overrightarrow{p} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}}{3}$$

より、点 P は線分 AB を 2 : 1、すなわち $1 : \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ に内分する。

■ス　これは計算するだけで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{b} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \frac{2}{3}|\overrightarrow{b}|^2 - \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b}\\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{3}{2}\\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

となる。

■セソタ　ここまでの情報から、$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{c}\\ &= -\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{c}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} - \frac{2}{3}\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + |\overrightarrow{c}|^2\\ &= -\frac{1}{3} - 1 + 3 = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

だから、$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = \sqrt{\frac{5}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{3}}$ である。

♠ ここはテクニックに頼らず、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)^2\\ &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{a}|^2 + \frac{4}{9}|\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2\\ &\qquad + \frac{4}{9}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - \frac{4}{9}\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} - \frac{2}{3}\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}\\ &= \frac{2}{9} + \frac{8}{9} + 3 + \frac{2}{9} - 2 - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

となることから求めてもよい。

■チ　$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ であるから、直線 CP は 辺 OA、辺 OB のどちらとも垂直に交わる。つまり、辺 OA と辺 OB によって定まる平面と垂直である。それは、三角形 OAB を含む平面である。よって③ OAB が正解。

■ツテト　内積の定義より、

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

であり、$\angle\mathrm{AOB} < 90^\circ$ だから明らかに $\sin\angle\mathrm{AOB} > 0$ なので、

$$\sin\angle\mathrm{AOB} = \sqrt{1 - \frac{1}{4^2}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

である。よって、求める面積は、

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

となる。

♠ 何も考えずにヘロンの公式を用いてもよい。その場合、

$$s = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから、求める面積は、

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-\sqrt{2})(s-\sqrt{2})(s-\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}\cdot\left(2-\frac{3}{4}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

となる。このほうが楽？

■ナニヌ　求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times|\mathrm{CP}| \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{3} \\ &= \frac{15}{36} = \boldsymbol{\frac{5}{12}} \end{aligned}$$

となる。