第 1 問［1］

長方形 ABCD において、 AB = CD = 8, BC = DA = 12 とする。辺 AB 上に点 P 、辺 BC 上に点 Q 、辺 CD 上に点 R を

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BQ} = \mathrm{CR}$$

となるようにとり、 AP = x とおく（$0 < x < 8$）。このとき、台形 PBCR の面積は $\boxed{\text{アイ}}$ である。また △PQR の面積 S は

$$S = x^2 - \boxed{\text{ウエ}}\,x + \boxed{\text{オカ}}$$

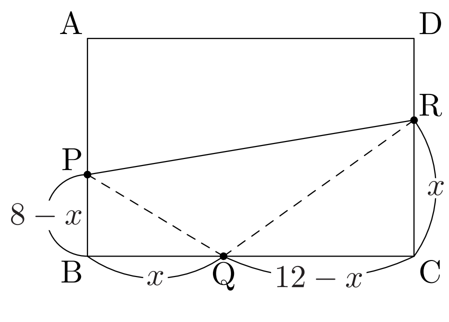
である。 $S < 24$ となる x の範囲は

$$\boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{ク}}$$

である。

CHECK

図形が出てきたら、とにかく図を描く！



■アイ　いま、$\mathrm{PB} = 8 - x, \mathrm{CR} = x$ であるから、台形 PBCR の面積は、

$$(\mathrm{PB} + \mathrm{CR}) \times \mathrm{BC} \times \frac{1}{2}$$
$$= \{(8 - x) + x\} \times 12 \times \frac{1}{2} = \mathbf{48}$$

である。

■ウエオカ　△PQR の面積は、今の台形の面積から △PBQ と △QCR の面積を引けばよい。どちらも直角三角形で、この 2 つの三角形の面積の和は、

$$\begin{aligned} &\triangle\mathrm{PBQ} + \triangle\mathrm{QCR} \\ &= \frac{1}{2}x(8 - x) + \frac{1}{2}(12 - x)x \\ &= \frac{1}{2}(-x^2 + 8x + 12x - x^2) \\ &= -x^2 + 10x \end{aligned}$$

であるから、

$$S = 48 - (-x^2 + 10x) = x^2 - \mathbf{10}x + \mathbf{48}$$

となる。

■キク　最後は 2 次不等式を解くだけです。

$$S = x^2 - 10x + 48 < 24$$

より、

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 24 &< 0 \\ (x - 4)(x - 6) &< 0 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\mathbf{4} < x < \mathbf{6}$$

第1問［2］

次の $\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを、次の ⓪～③ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

自然数 m, n について、条件 p, q, r を次のように定める。

p：$m+n$ は 2 で割り切れる
q：n は 4 で割り切れる
r：m は 2 で割り切れ、かつ n は 4 で割り切れる

また、条件 p の否定を $\overline{p}$ 、条件 q の否定を $\overline{q}$ で表す。このとき

p は r であるための $\boxed{\text{ケ}}$。
$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための $\boxed{\text{コ}}$。
「p かつ q」は r であるための $\boxed{\text{サ}}$。
「p または q」は r であるための $\boxed{\text{シ}}$。

⓪ 必要十分条件である　① 必要条件であるが、十分条件でない
② 十分条件であるが、必要条件でない　③ 必要条件でも十分条件でもない

CHECK

「A は B であるための何条件か」という問題では、2 つの命題「A ⇒ B」と「B ⇒ A」の真偽を調べる！

■ケ　今回は $p \Rightarrow r$ と $r \Rightarrow p$ の真偽を調べればよい。いま、

- $p \Rightarrow r$ は偽（反例：$m=1, n=1$ など）　→ p は十分条件ではない
- $r \Rightarrow p$ は真（m, n が共に偶数なので、明らかにその和は偶数。）→ p は必要条件

より、p は必要条件であるが、十分条件でない（①が正解）。

■コ　今回は、$\overline{p} \Rightarrow \overline{r}$ と $\overline{r} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽が分かればよいのですが、ここで「ある命題とその対偶命題の真偽は一致する」ことを利用して、その対偶の命題 $r \Rightarrow p$ と $p \Rightarrow r$ を調べてしまえばよい。それはすでに調べているので、対偶命題を取って、

- $\overline{r} \Rightarrow \overline{p}$ は偽　（$\overline{p}$ は必要条件ではない）
- $\overline{p} \Rightarrow \overline{r}$ は真　（$\overline{p}$ は十分条件）

ということが分かる。よって、$\overline{p}$ は十分条件であるが必要条件ではない（②が正解）。

■サ　「p かつ q」を条件 x とする。条件 x とは「$m+n$ が偶数、かつ、n は 4 の倍数」であり、これは「m が偶数、n が 4 の倍数」と言い換えられる。つまり、x と r は同値な命題であるから、「p かつ q」は必要十分条件である（⓪が正解）。

■シ　「p または q」を条件 y とする。条件 y とは「$m+n$ が偶数、または、n は 4 の倍数」である。これは簡単に言いなおせないのでこのままにし、次の 2 つの命題の真偽を反例探しに注意して考える。

- $y \Rightarrow r$ は偽（反例：$m=1, n=1$ など）
- $r \Rightarrow y$ は真

よって、y は必要条件であるが、十分条件でない（①が正解）。

第2問

a, b を定数とし、$a \neq 0$ とする。2 次関数

$$y = ax^2 - bx - a + b \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフが点 $(-2, 6)$ を通るとする。このとき、$b = -a + \boxed{ア}$ であり、グラフの頂点の座標を a を用いて表すと、

$$\left(\frac{-a + \boxed{イ}}{\boxed{ウ}\,a},\ \frac{-\left(\boxed{エ}\,a - \boxed{オ}\right)^2}{\boxed{カ}\,a} \right)$$

である。さらに、2 次関数①のグラフの頂点の y 座標が -2 であるとする。このとき、a は

$$\boxed{キ}\,a^2 - \boxed{クケ}\,a + \boxed{コ} = 0$$

を満たす。これより、a の値は $a = \boxed{サ}, \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

以下、$a = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ であるとする。このとき、2 次関数①のグラフの頂点の x の座標は $\boxed{セ}$ であり、①のグラフと x 軸の 2 交点の x 座標は $\boxed{ソ}, \boxed{タ}$ である。ただし、$\boxed{ソ}, \boxed{タ}$ は解答の順序を問わない。

また、関数①は $0 \leqq x \leqq 9$ において

$x = \boxed{チ}$ のとき、最小値 $\boxed{ツテ}$ をとり、

$x = \boxed{ト}$ のとき、最小値 $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}$ をとる。

CHECK

“通る点”は代入！

■ア　$x = -2, y = 6$ を代入して、

$$6 = 4a + 2b - a + b$$

を整理して、

$$b = -a + \mathbf{2} \qquad \text{(a)}$$

である。

CHECK

平方完成は定石通り行う！

(1)　まずは x の項までを x^2 の係数 a でくくる（$a = 1$ の場合は省略)。

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

(2)　次に括弧の中に注目して平方完成。

$(x + x \text{ の係数の半分})^2 - x \text{ の係数の半分}^2$

となり、具体的には、

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

となる。これを上の式に代入する。

■イウエオカ　まず、$b=-a+2$ を代入して、式①は

$$y = ax^2+(a-2)x-2a+2 \qquad \text{(b)}$$

となる。これを注意深く平方完成する。

$$\begin{aligned} y &= a\left(x^2+\frac{a-2}{a}\right)-2a+2 \\ &= a\left(x+\frac{a-2}{2a}\right)^2-a\left(\frac{a-2}{2a}\right)^2-2a+2 \\ &= a\left(x+\frac{a-2}{2a}\right)^2-\frac{a^2-4a+4+8a^2-8a}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{a-2}{2a}\right)^2-\frac{9a^2-12a+4}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{a-2}{2a}\right)^2-\frac{(3a-2)^2}{4a} \end{aligned}$$

となるから、頂点は、

$$\left(\frac{-a+\mathbf{2}}{\mathbf{2}a}, \frac{-(\mathbf{3}a-\mathbf{2})^2}{\mathbf{4}a}\right) \qquad \text{(c)}$$

■キクケコサシス　先ほどの頂点の y 座標 $=-2$ となるように方程式を立てると、

$$\begin{aligned} \frac{-(3a-2)^2}{4a} &= -2 \\ -9a^2+12a-4 &= -8a \\ \mathbf{9}a^2-\mathbf{20}a+\mathbf{4} &= 0 \\ (a-2)(9a-2) &= 0 \end{aligned}$$

より、

$$a = \mathbf{2}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$$

である。

■セ　$a=\dfrac{2}{9}$ を (c) の x 座標に代入して、

$$\frac{-a+2}{2a} = \frac{\frac{16}{9}}{2\cdot\frac{2}{9}} = \frac{16}{4} = \mathbf{4}$$

である。

$\boxed{\text{CHECK}}$

$y=f(x)$ と x 軸との交点は方程式 $f(x)=0$ の解

■ソタ　$a=\dfrac{2}{9}$ を (b) に代入してもよいが、(a) より、

$$b=-a+2=-\frac{2}{9}+\frac{18}{9}=\frac{16}{9}$$

であるから、これを①に代入して、

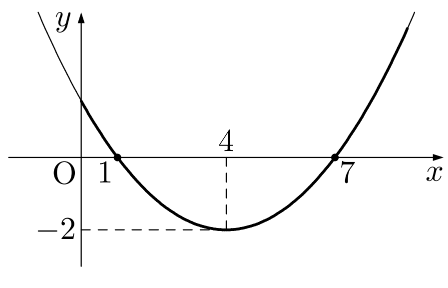
$$y=\frac{2}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{14}{9} \qquad \text{(d)}$$

となる。これと x 軸の交点は、

$$\begin{aligned} \frac{2}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{14}{9} &= 0 \\ x^2-8x+7 &= 0 \\ (x-1)(x-7) &= 0 \end{aligned}$$

より、$x=\mathbf{1},\mathbf{7}$ である。

■チツテトナニヌ　これまでの情報から描かれるグラフは次のようになる（太線は $0 \leqq x \leqq 9$）。



グラフより、$x=\mathbf{4}$ のとき最小値を取る。最小値は頂点の y 座標だから（問題文にあるように）$\mathbf{-2}$ である。最大値は範囲内で頂点から遠いほう、すなわち $x=\mathbf{9}$ のときに取り、その値は同様に (d) 式に $x=9$ を代入して、

$$y=18-16+\frac{14}{9}=\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{9}}$$

である。

第 3 問

$\triangle$ABC において、$\text{AB} = 7, \text{BC} = 4\sqrt{2}, \angle\text{ABC} = 45^\circ$ とする。また、$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。このとき、$\text{CA} = \boxed{\text{ア}}$ であり、外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

外接円 O 上の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を $\text{CD} = \sqrt{10}$ であるようにとる。$\angle\text{ADC} = \boxed{\text{オカ}}^\circ$ であるから、$\text{AD} = x$ とすると x は 2 次方程式

$$x^2 - \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,x - \boxed{\text{ケコ}} = 0$$

を満たす。$x > 0$ であるから $\text{AD} = \boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ となる。

下の $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ には、次の⓪〜⑤のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ AC　① AD　② AE　③ BA　④ CD　⑤ ED

点 A における外接円の接線と辺 DC の延長の交点を E とする。このとき、$\angle\text{CAE} = \angle\boxed{\text{ス}}\text{E}$ であるから、$\triangle$ACE と $\triangle\text{D}\boxed{\text{セ}}$ は相似である。これより、

$$\text{EA} = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}\,\text{EC}$$

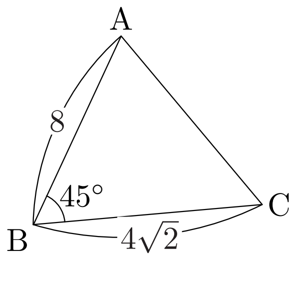
である。また、$\text{EA}^2 = \boxed{\text{ツ}} \cdot \text{EC}$ である。したがって

$$\text{EA} = \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$$

であり、$\triangle$ACE の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

CHECK

図形が出てきたら、とにかく図を描く！



CHECK

“3 辺と 1 角” から 1 つ足りないときは余弦定理！

■ア　$\triangle$ABC に余弦定理を用いて、

$$\text{CA}^2 = \text{AB}^2 + \text{BC}^2 - 2\text{AB}\cdot\text{BC}\cdot\cos\angle\text{ABC}$$
$$= 7^2 + 32 - 2\cdot 7\cdot 4\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25$$

となり、$\text{CA} > 0$ だから $\text{CA} = \mathbf{5}$ である。

$\boxed{\text{CHECK}}$

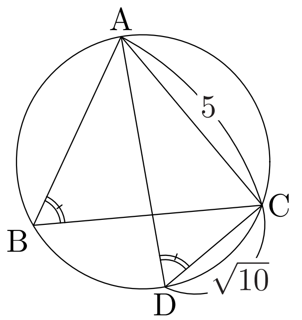
外接円の半径には正弦定理！

■イウエ　外接円の半径を R とすると、正弦定理より、

$$2R = \frac{\mathrm{AC}}{\sin \mathrm{B}} = 5\sqrt{2}$$

より、$R = \boldsymbol{\frac{5}{2}\sqrt{2}}$ となる。

■オカ　問題文の通り絵を書き加えると以下のとおりになる。



図から B と D は同一円上にあるから、円周角の定理より、

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ADC} = \mathbf{45}^\circ$$

となる。

■キクケコサシ　$\triangle\mathrm{ADC}$ に余弦定理を用いて、

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{DC}^2 - 2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\cos\mathrm{ADC}$$

$$25 = x^2 + 10 - 2\sqrt{10}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 - \boldsymbol{2\sqrt{5}}x - \mathbf{15} = 0$$

となり、これを解いて、

$$x = \sqrt{5} \pm \sqrt{5-(-15)} = \sqrt{5} \pm 2\sqrt{2}$$

$$= -\sqrt{5}, 3\sqrt{5}$$

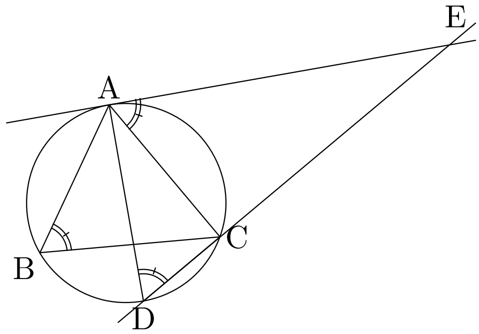
となる。$x > 0$ より、$x = \mathrm{AD} = \boldsymbol{3\sqrt{5}}$ である。

♠ マス目の形から、

$$(x-3\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0$$

という因数分解を思いついてもよい。

■スセ　さらに問題文の通り点 A における接線を引くと、以下のようになる。



接弦定理より、$\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{ABC}$ であり、先ほどのように円周角は等しいので $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ADE}$ だから、

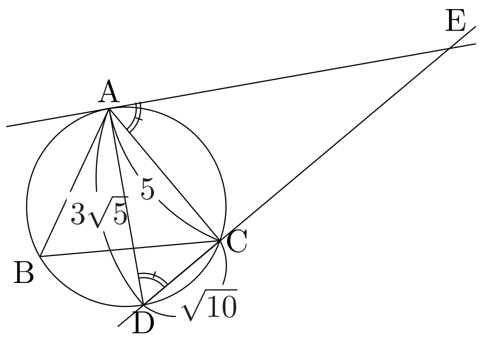
$$\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathbf{AD}\mathrm{E}$$

である。これより、$\triangle\mathrm{ACE}$ と $\triangle\mathbf{DA}\mathrm{E}$ は

- $\angle\mathrm{E}$ が共通
- $\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{EDA}$

より 2 角が等しいので相似。

■ソタチツ



以下ではどの辺の比を使うか分かりにくい。そこで先に分かっている比を書くと、$\mathrm{EA} : \mathrm{AC} : \mathrm{CE} = \mathrm{ED} : \mathrm{DA} : \mathrm{AE}$ すなわち、

$$\mathrm{EA} : 5 : \mathrm{EC} = \mathrm{ED} : 3\sqrt{5} : \mathrm{EA}$$

である。このうち、EA と EC の関係を求めることができるのは後ろ 2 つであり、

$$5 : \mathrm{EC} = 3\sqrt{5} : \mathrm{EA}$$

$$5\mathrm{EA} = 3\sqrt{5}\mathrm{EC}$$

より、

$$\mathrm{EA} = \boldsymbol{\frac{3}{5}\sqrt{5}}\mathrm{EC} \qquad \text{(a)}$$

となる。一方、EA^2 が現れるのは1つ目と3つ目の項の比で、$\mathrm{EA} : \mathrm{EC} = \mathrm{ED} : \mathrm{EA}$ すなわち、

$$\mathrm{EA}^2 = \mathbf{ED} \cdot \mathrm{EC} \qquad \text{(b)}$$

である。

■テトナニ　これまでの情報から、EA以外の辺をEAのみで表すように変形する。(a)式より、

$$\mathrm{EC} = \frac{5}{3\sqrt{5}}\mathrm{EA} = \frac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{EA}$$

であり、

$$\mathrm{ED} = \mathrm{EC} + \sqrt{10} = \frac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{EA} + \sqrt{10}$$

となることが分かるので、これを(b)式に代入して（ここで $\mathrm{EA} = x$ とおく）、

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}x + \sqrt{10}\right) \times \frac{\sqrt{5}}{3}x$$

$$x^2 = \frac{5}{9}x^2 + \frac{5\sqrt{2}}{3}x$$

となり、$x \neq 0$ より両辺を x で割って整理すると、$x = \mathrm{EA} = \boldsymbol{\frac{15}{4}\sqrt{2}}$ となる。

$\boxed{\text{CHECK}}$

面積比は相似比の2乗同士の比

■ヌネノ　$\triangle\mathrm{ACE}$ と $\triangle\mathrm{DAE}$ の相似比は $5 : 3\sqrt{5}$ であるから、面積比はその2乗同士の比だから、

$$\triangle\mathrm{ACE} : \triangle\mathrm{DAE} = 25 : 45 = 5 : 9$$

である。いま $\triangle\mathrm{ADC}$ の面積は、

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DAC} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{AD} \cdot \mathrm{DC}\sin\angle\mathrm{ADC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{15}{2}\end{aligned}$$

であるから、$\triangle\mathrm{ACE} = S$ とおくと、

$$\triangle\mathrm{ACE} : \triangle\mathrm{DAE} = S : S + \frac{15}{2} = 5 : 9$$

より、

$$\begin{aligned}9S &= 5S + \frac{75}{2} \\ 4S &= \frac{75}{2} \\ S &= \boldsymbol{\frac{75}{8}}\end{aligned}$$

となる。

第4問

さいころを3回投げ、次の規制にしたがって文字の列を作る。ただし、何も書かれていないときや文字が1つだけのときも文字の列と呼ぶことにする。1回目は次のようにする。

- 出た目の数が1, 2のときは、文字Aを書く
- 出た目の数が3, 4のときは、文字Bを書く
- 出た目の数が5, 6のときは、何も書かない

2回目、3回目は次のようにする。

- 出た目の数が1, 2のときは、文字の列の右側に文字Aを1つ付け加える
- 出た目の数が3, 4のときは、文字の列の右側に文字Bを1つ付け加える
- 出た目の数が5, 6のときは、いちばん右側の文字を削除する。ただし、何も書かれていないときはそのままにする

以下の問いでは、さいころを3回投げ終わったときにできる文字の列について考える。

(1)　文字の列がAAAとなるさいころの目の出方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りである。文字の列がABとなるさいころの目の出方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りである。

(2)　文字の列がAとなる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ であり、何も書かれていない文字の列となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

(3)　文字の列の字数が3となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ であり、字数が2となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である。また、文字の列の字数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。ただし、何も書かれていないときの字数は0とする。

■ア　AAAとなるのは、3回とも1か2が出ればよいので、$2\times 2\times 2=\mathbf{8}$ 通り。

■イ　2回目以降に5か6が出ると、3回終了時に2文字となることはない。よって、1回目が5か6、2回目が1か2、3回目が3か4の場合しかあり得ない。よってこれも $2\times 2\times 2=\mathbf{8}$ 通り。

■ウエオ　以下では、1か2の目が出ることを“a”、3か4の目が出ることを“b”、5か6の目が出ることを“×”で表すことにする。これらの起こる確率はすべて $\dfrac{1}{3}$ である。

文字列がAとなる場合を樹形図で表すと、

a — a − ×
a — b − ×
a — × − a

b —— × − a

× —— × − a

の 5 通り。それぞれの事象の起こる確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

で、それぞれの事象は背反だから、文字列が A となる確率は

$$\frac{1}{27}\times 5=\mathbf{\frac{5}{27}}$$

である。

■カキク　これも丁寧に樹形図を書いていく。何も書かれていない文字列になるのは、

a —— × − ×

b —— × − ×

× — a − ×
× — b − ×
× — × − ×

となり、先ほどと同様それぞれの事象の起こる確率は $\frac{1}{27}$ ですべて背反だから、やはり $\mathbf{\frac{5}{27}}$ である。

■ケコサ　文字列が 3 文字になるのは、3 回とも “ a ” か “ b ” が起こる場合で、事象『“ a ” または “ b ”』が起こる確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ なので、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{8}{27}}$$

である。

■シスセ　文字数が 2 文字となる場合を直接求めるのは難しいので、他の文字数の場合を先に求める。

- 文字数が 0 文字になるのは、すでに見たように $\frac{5}{27}$ である。
- 文字数が 1 文字になるのは、
  - A のみ：すでに見たように $\frac{5}{27}$
  - B のみ：A のみの場合と同様に考えればよく、$\frac{5}{27}$

  より、これらの和で $\frac{10}{27}$ である。
- 文字数が 3 文字になるのは $\frac{8}{27}$ である。

よって、文字数が 2 文字になるのは、

$$1-\left(\frac{5}{27}+\frac{10}{27}+\frac{8}{27}\right)=\frac{4}{27}$$

である。

■ソタチ　以上から、文字数の期待値は、

$$0\times\frac{5}{27}+1\times\frac{10}{27}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{8}{27}$$
$$=\frac{10+8+24}{27}=\frac{42}{27}=\mathbf{\frac{14}{9}}$$

である。